PARABLINDA AIRLINES

2010

GEOMETRIA DELLA DISCESA

di

ALBERTO SERRA

Versione 1.1 del 26/04/2010

GEOMETRIA DELLA DISCESA

Premessa

Queste pagine vogliono essere una semplice guida che tenta di spiegare quali principi geometrici, matematici e fisici stanno alla base di una discesa calcolata con un aeromobile.

Il linguaggio volutamente semplice e poco accademico è stato usato per rendere il documento accessibile a tutti anche se non si è potuto prescindere dall'utilizzo di strumenti fisici e matematici.

Le ipotesi fatte nel paragrafo successivo riguardano esclusivamente il tipo di moto dell'aeromobile che è stato considerato sempre rettilineo (su un'unica retta) e uniforme (a velocità costante).

Tale ipotesi non è sempre verificata durante le discese nei voli reali e simulati in quanto la velocità di un aeromobile non è sempre costante. Considerare variabile la velocità sarebbe un'inutile complicazione matematica che è lontana dallo scopo di questo documento.

1. La discesa di un aeromobile

La traiettoria di aeromobile in discesa (il discorso è valido anche per la salita) è la risultante di 2 moti:

1. sul piano orizzontale che è il responsabile dell'avanzamento;
2. sul piano verticale che è il responsabile della variazione di quota.

Per lo studio dei questi moti ci riferiremo alle velocità intese sia come intensità e sia come direzione e verso (il vettore velocità) in quanto la traiettoria seguita da un aeromobile è direttamente collegata alle velocità.

La velocità con cui si muove l'aeromobile Va è il risultato della **somma vettoriale** eseguita tra la velocità verticale Vv e la velocità orizzontale Vo. Per semplificare diciamo che la somma vettoriale è una somma che tiene conto della direzione del verso e dell'intensità di una grandezza fisica.

Nella figura 1 tale **somma vettoriale** viene eseguita graficamente con il triangolo delle velocità Va – Vv - Vo

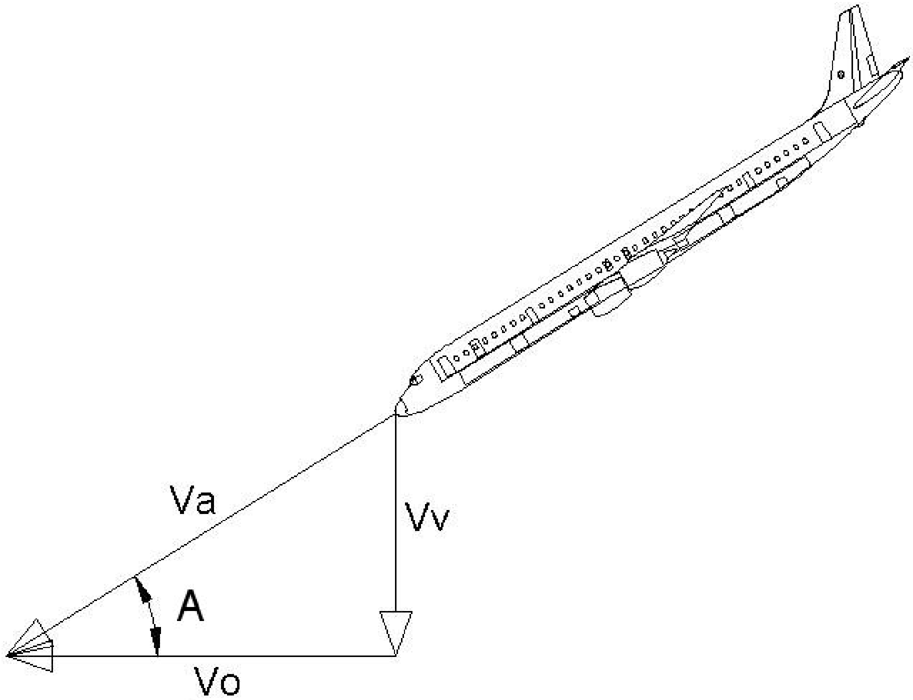


Figura 1

Nella figura precedente e in quelle successive viene riportato un angolo di discesa accentuato per garantire una migliore comprensione delle figure.

Studiamo ora quella che è la traiettoria seguita dall'aeromobile durante la sua discesa.

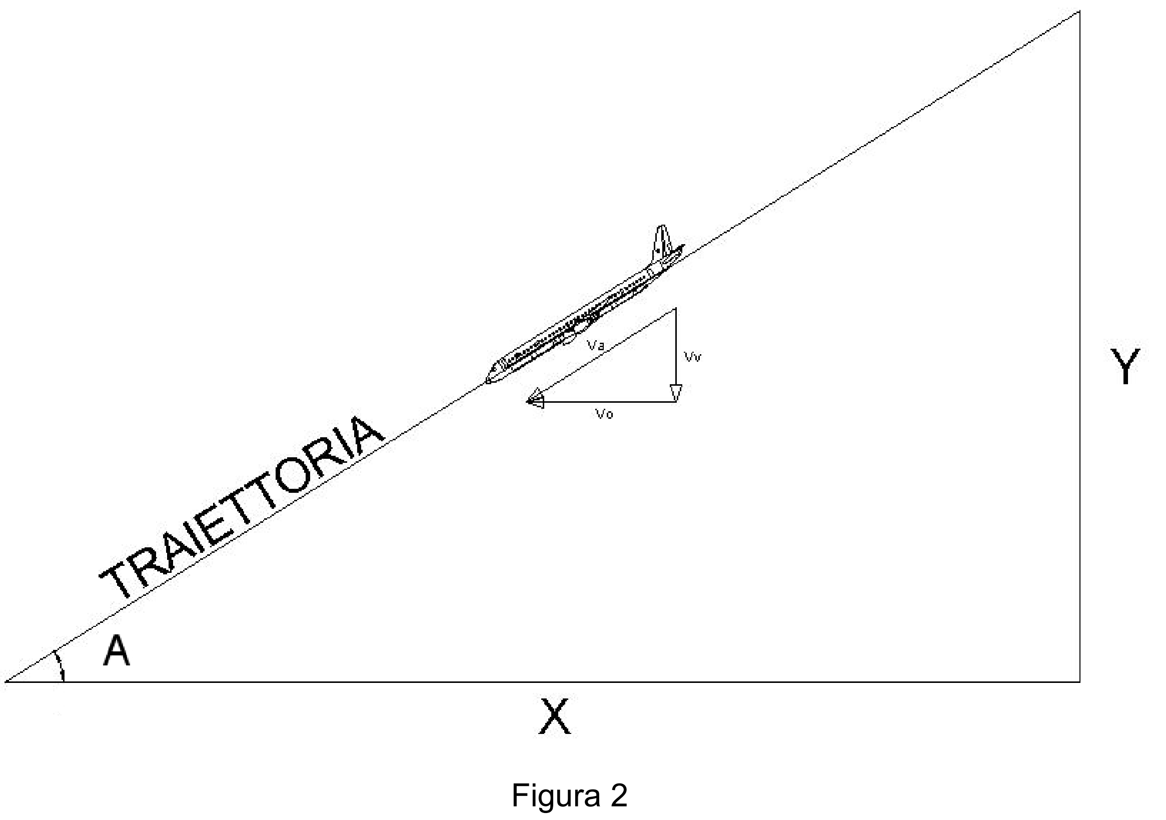


Figura 2

In generale la velocità e sempre tangente alla traiettoria, ma in particolare, nel moto rettilineo, la retta che contiene il vettore velocità coincide con la traiettoria seguita dall'aeromobile.

Nella figura 2 è indicata chiaramente la traiettoria dell'aeromobile in rapporto con il triangolo delle velocità indicato in precedenza. I due triangoli (quello grande e quello piccolo) sono triangoli simili (hanno 3 angoli uguali) pertanto devono esistere delle relazioni che mettano in collegamento i lati di questi triangoli ed in particolare la Vv con Y e la Vo con X intendendo con X e con Y la distanza orizzontale e verticale percorsa dal nostro aeroplano seguendo la nostra traiettoria. Tali relazioni vengono prese in prestito dalla cinematica e sono le leggi del moto rettilineo uniforme.

$$Vv = \frac{Y}{t} \qquad Vo = \frac{X}{t}$$

Tali espressioni mettono in relazione la distanza verticale ed orizzontale percorsa con la velocità. Con t abbiamo indicato il tempo, con X la distanza orizzontale con Y la distanza verticale (perdita di quota dell'aeromobile).

Essendo il moto dell'aeromobile composizione dei due moti orizzontale e verticale, il tempo t è uguale in entrambe le relazioni e con alcuni semplici passaggi matematici è possibile ricavare un'espressione che lega la distanza percorsa in una discesa alla velocità di discesa e alla velocità orizzontale.

$$X = Y\frac{Vo}{Vv}$$

Cioè con questa formuletta, data una velocità di discesa Vv, la velocità orizzontale Vo e la quota da perdere Y, è possibile calcolare la distanza necessaria per perdere la quota Y e quindi conoscere quando è necessario iniziare una discesa.

Naturalmente conosciuto X è possibile calcolare il tempo necessario per effettuare la discesa con la formuletta inversa.

$$t = \frac{X}{Vo}$$

Da notare che in tutte queste pagine abbiamo ragionato solo parlando di velocità e di distanze, mai di massa dell'aeromobile. Questo significa che se imponiamo ad un Cessna 172 ed ad un B747 una certa velocità orizzontale ed una certa velocità verticale, uguale per entrambi i velivoli, lo spazio percorso sarà esattamente lo stesso. Questo perché, a meno di resistenze aerodinamiche e attriti vari, un oggetto che cade nel vuoto raggiunge una velocità che è solo funzione dell'altezza della caduta e non della massa dell'oggetto come erroneamente si crede. A titolo informativo la velocità di un oggetto in caduta libera si calcola con la seguente formula

$$V = \sqrt{2gh}$$

dove V è la velocità di caduta g è l'accelerazione di gravità e h è l'altezza di caduta.
La verifica di quanto affermato nelle righe precedenti la si può effettuare semplicemente facendo cadere contemporaneamente un foglio di carta appallottolato e un mazzo di chiavi.

Ai più ferrati in matematica non sarà sfuggito, guardandola figura 1, che il rapporto $\frac{Vo}{Vv}$ è l'inverso della tangente (funzione trigonometrica) dell'angolo A.

$$Tan(A) = \frac{Vv}{Vo}$$

$$X = \frac{Y}{Tan(A)}$$

Vediamo l'utilizzo che ne viene fatto nella normale pratica aeronautica.
Può capitare che in alcune carte, per esempio sulle carte ILS o VOR, vi sia indicato l'angolo di discesa o la discesa indicata in percentuale. Non troverete mai l'indicazione in piedi al minuto Ft/min del rateo di discesa se non in riferimento ad una velocità orizzontale. Questo perché il rateo di discesa è funzione della velocità orizzontale ed in particolare maggiore è la velocità orizzontale maggiore è la velocità di discesa. La dimostrazione grafica è rappresentata nella figura 3.

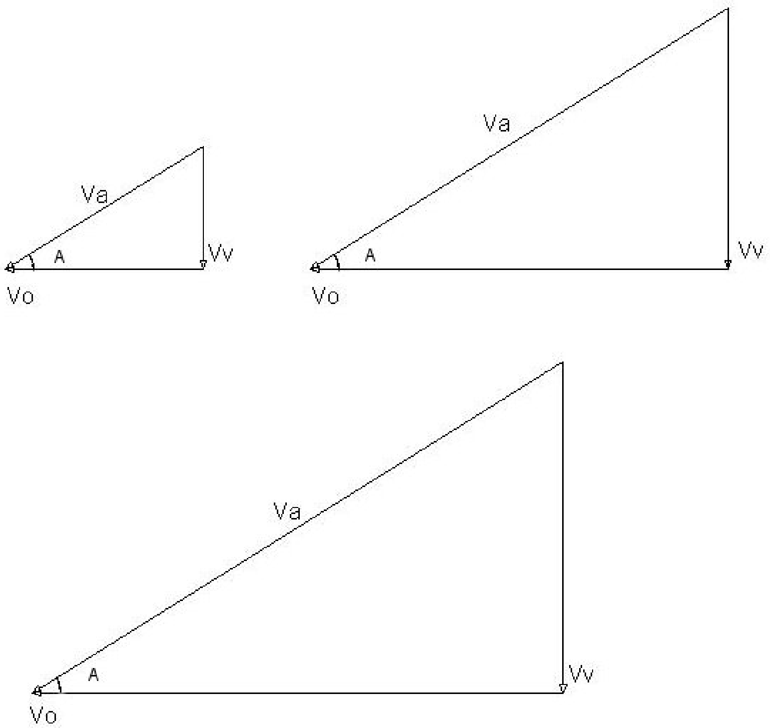


Figura 3

Il quesito che ci poniamo è quello di sapere qual è il rateo di discesa da utilizzare nell'aeromobile per esempio per seguire la traccia glideslope dell'ILS.
La soluzione al quesito sta nella formuletta e

$$Tan(A) = \frac{Vv}{Vo}$$

e nella sua formula inversa

$$Vv = Vo * Tan(A)$$

Per esempio, per seguire un glideslope che ha un angolo rispetto all'orizzontale di 5 gradi ad una velocità di 150 kt si dovrà imporre un rateo di discesa di

$$Vv = 150 * Tan(5)$$

Questa formula non è di immediata applicazione perché comporta il calcolo della tangente di un angolo, operazione questa che può essere eseguita tramite una semplice calcolatrice scientifica (il calcolo della tangente e della sua funzione inversa verrà trattata nell'appendice a questo documento).

Inoltre se la velocità orizzontale è espressa in noti Kt otterremo una velocità verticale in nodi, non molto utile ai nostri scopi. Moltiplicando per un coefficiente di conversione pari a 101,268591425984 il risultato della formula $Vv = 150 * Tan(5)$ si ottiene la velocità verticale in piedi al minuto Ft/min.

In appendice riporteremo come convertire le varie unità di misura utilizzate in queste pagine.

Per amor di discussione comunque è possibile guardando la formuletta scritta in precedenza trovare conferma di quanto dimostrato graficamente nella figura 3. E' infatti facile dimostrare che più aumenta la velocità orizzontale maggiore deve essere il rateo di discesa per seguire la traiettoria di discesa.

E nel caso in cui ci trovassimo a che fare con un indicazione del rateo di discesa in % (es. 5%)?

Questa è un'indicazione che rappresenta la pendenza della traiettoria di discesa rispetto all'orizzontale. La pendenza di una retta rispetto all'orizzontale è la tangente (funzione trigonometrica) dell'angolo che le 2 rette formano moltiplicato per 100. Nel nostro caso l'angolo A. Quindi l'informazione che ci viene data con la pendenza è subito utilizzabile sempre con la nostra formuletta di riferimento

$$Vv = Vo * Tan(A)$$

in quanto dalla definizione di pendenza appena data si ha che

$$tan(A) = \frac{P}{100}$$

Dove P è la pendenza assegnata. Es. se P=5% → $Tan(A) = \frac{5}{100} = 0{,}05$

Inserendo questo valore nella $Vv = Vo * Tan(A)$ cioè $Vv = Vo * 0{,}05$ si ottiene il rateo di discesa in funzione della velocità orizzontale.

Se la velocità orizzontale è espressa in nodi Kt per ottenere la velocità verticale in piedi al minuto Ft/min è necessario moltiplicare per un coefficiente di conversione pari a 101,268591425984 e il risultato della formula sarà $Vv = Vo * 0{,}05 * 101{,}268591425984$.

Con l'ausilio della calcolatrice è semplice scoprire a quanto corrisponde l'angolo A di discesa.

2. L'abaco

E' possibile ridurre quanto scritto nelle pagine precedenti ad un abaco di facile lettura e facilmente utilizzabile nelle fasi del volo, non richiedendo calcoli.
Osservando l'abaco riportato nella figura 4 notiamo che:

1. Nell'asse orizzontale o delle ascisse vengono riportate le velocità orizzontali in Nodi KT;
2. Nell'asse verticale o delle ordinate vengono riportate le velocità verticali in piedi al minuto Ft/min;
3. Nella parte centrale del grafico vi sono numerose rette corrispondenti alla relazione $Vv = Vo * Tan(A)$ dove la diversa inclinazione è dovuta al variare del valore della percentuale di discesa (da 3% al 30%). Per i restanti valori si procede per interpolazione.

L'utilizzo dell'abaco è semplice intuitivo. Una volta scelti i dati necessari, quali la pendenza della discesa e la velocità orizzontale, si traccia una retta verticale in corrispondenza della velocità orizzontale assegnata (linea rossa nei grafici di esempio) fino ad intercettare la retta corrispondente alla pendenza della discesa assegnata. Dal punto di intersezione si traccia una retta orizzontale fino all'asse verticale o delle ordinate (linea verde nei grafici di esempio) dove leggeremo il valore della velocità verticale corrispondente.

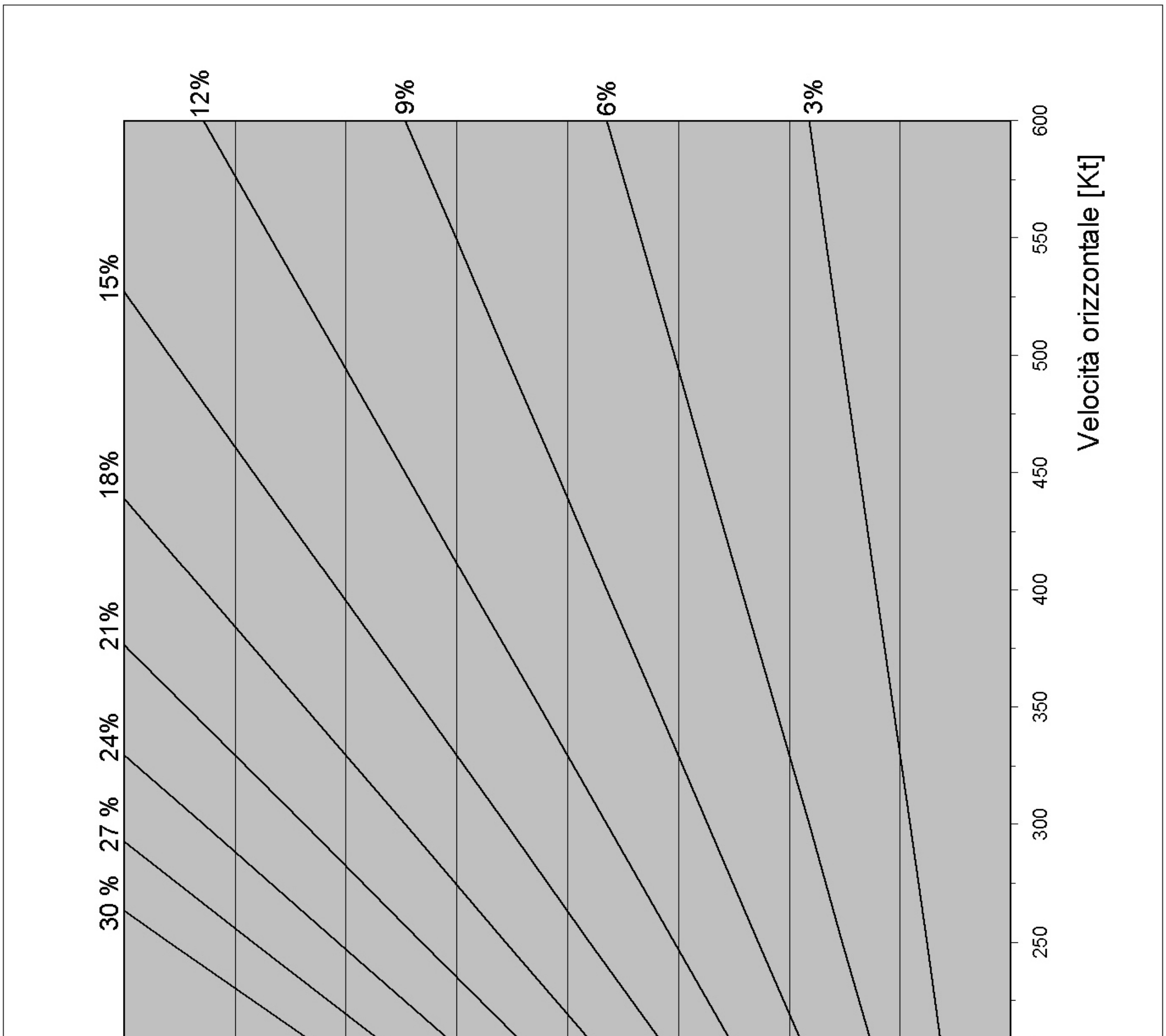

Rateo di discesa [Ft/min]
Velocità orizzontale [Kt]
30 %
27 %
24%
21%
18%
15%
12%
9%
6%
3%
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600

Figura 4

Vediamo alcuni esempi di utilizzo dell'abaco.

Esempio 1

Consideriamo una discesa con pendenza P = 12% e una velocità orizzontale di 350 kt

Dalla formula $Vv = Vo * Tan(A) * 101{,}268591425984 = Vo * \frac{P}{100} * 101{,}268591425984$, sostituendo i valori dati si ottiene $Vv = 350 * \frac{12}{100} * 101{,}268591425984 = 4253 \ \mathrm{ft/min}$

L'angolo di discesa sarà di circa 5° 10'.

Il risultato grafico può essere ottenuto come rappresentato in figura 5.

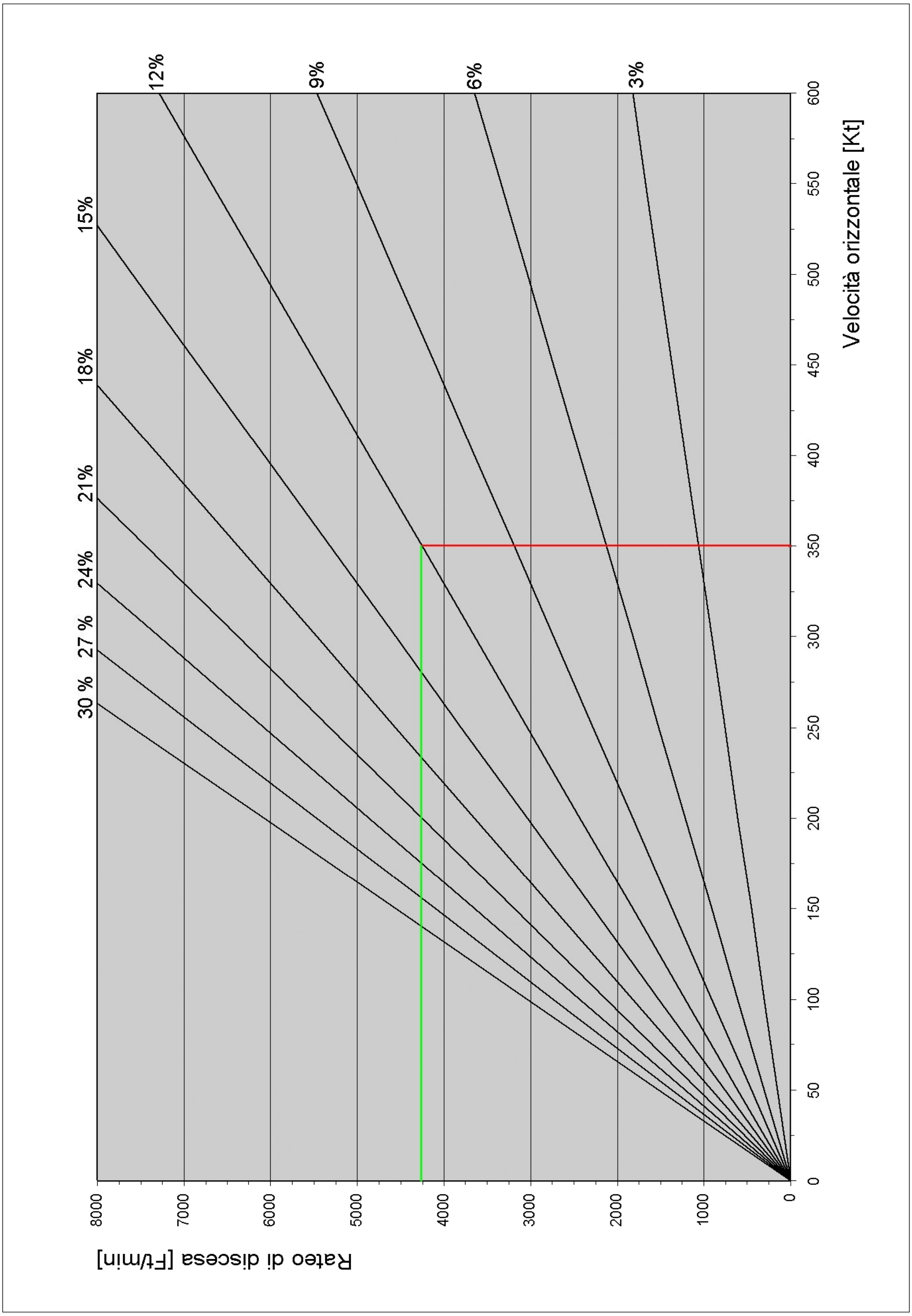


Figura 5 – Esempio 1

Esempio 2

Consideriamo una discesa con pendenza P = 6% e una velocità orizzontale di 275 kt

Dalla formula $Vv = Vo * Tan(A) * 101{,}268591425984 = Vo * \frac{P}{100} * 101{,}268591425984$, sostituendo i valori dati si ottiene $Vv = 275 * \frac{6}{100} * 101{,}268591425984 = 1670 \text{ ft/min}$

L'angolo di discesa sarà di circa 3° 30'.

Il risultato grafico può essere ottenuto come rappresentato in figura 6.

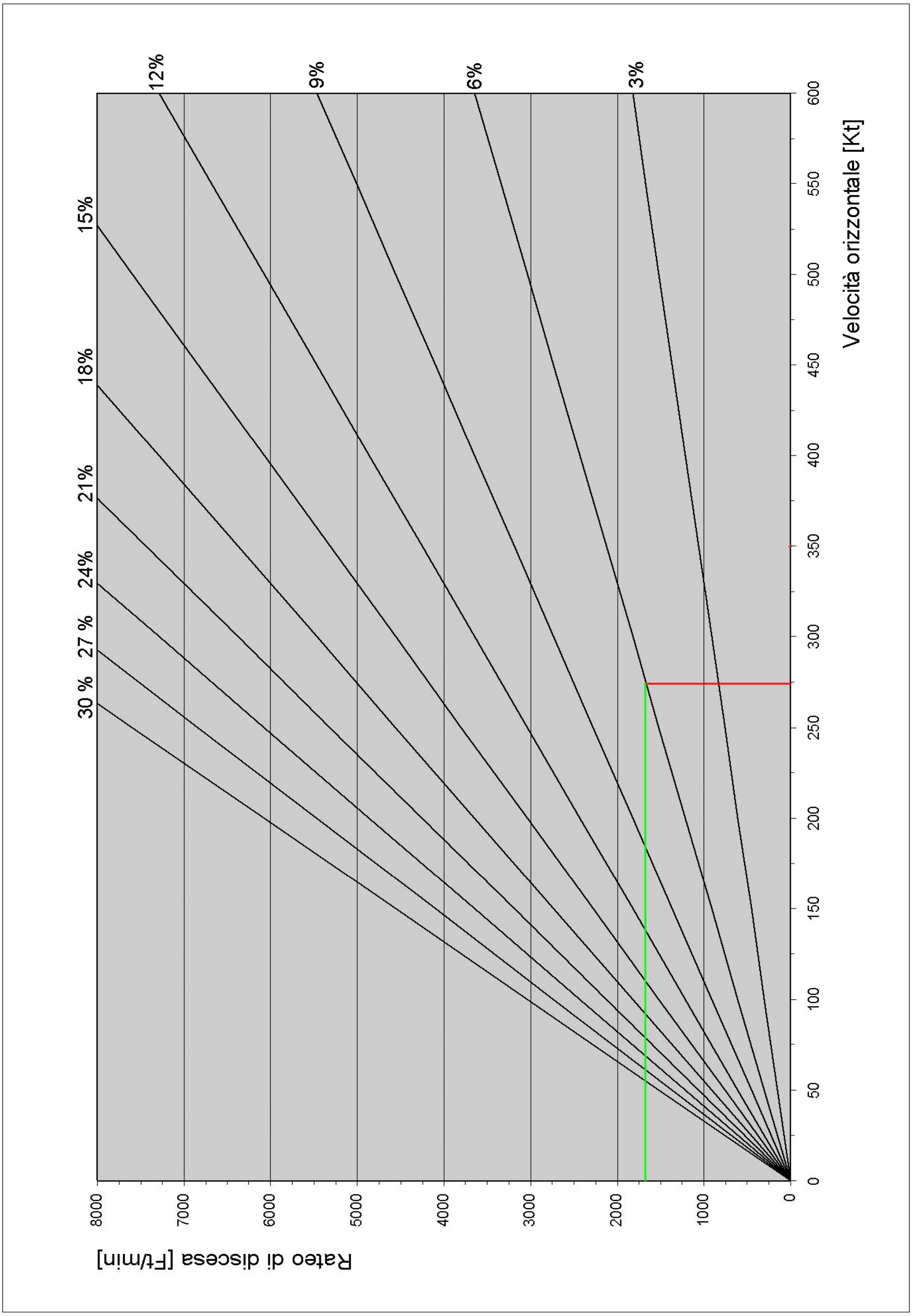


Figura 6 – Esempio 2

Esempio 3

Consideriamo una discesa con pendenza P = 11% e una velocità orizzontale di 350 kt

Dalla formula $Vv = Vo * Tan(A) * 101{,}268591425984 = Vo * \frac{P}{100} * 101{,}268591425984$, sostituendo i valori dati si ottiene $Vv = 350 * \frac{11}{100} * 101{,}268591425984 = 3898 \;\; \mathrm{ft/min}$

L'angolo di discesa sarà di circa 6° 20'.

Il risultato grafico può essere ottenuto come rappresentato in figura 7.

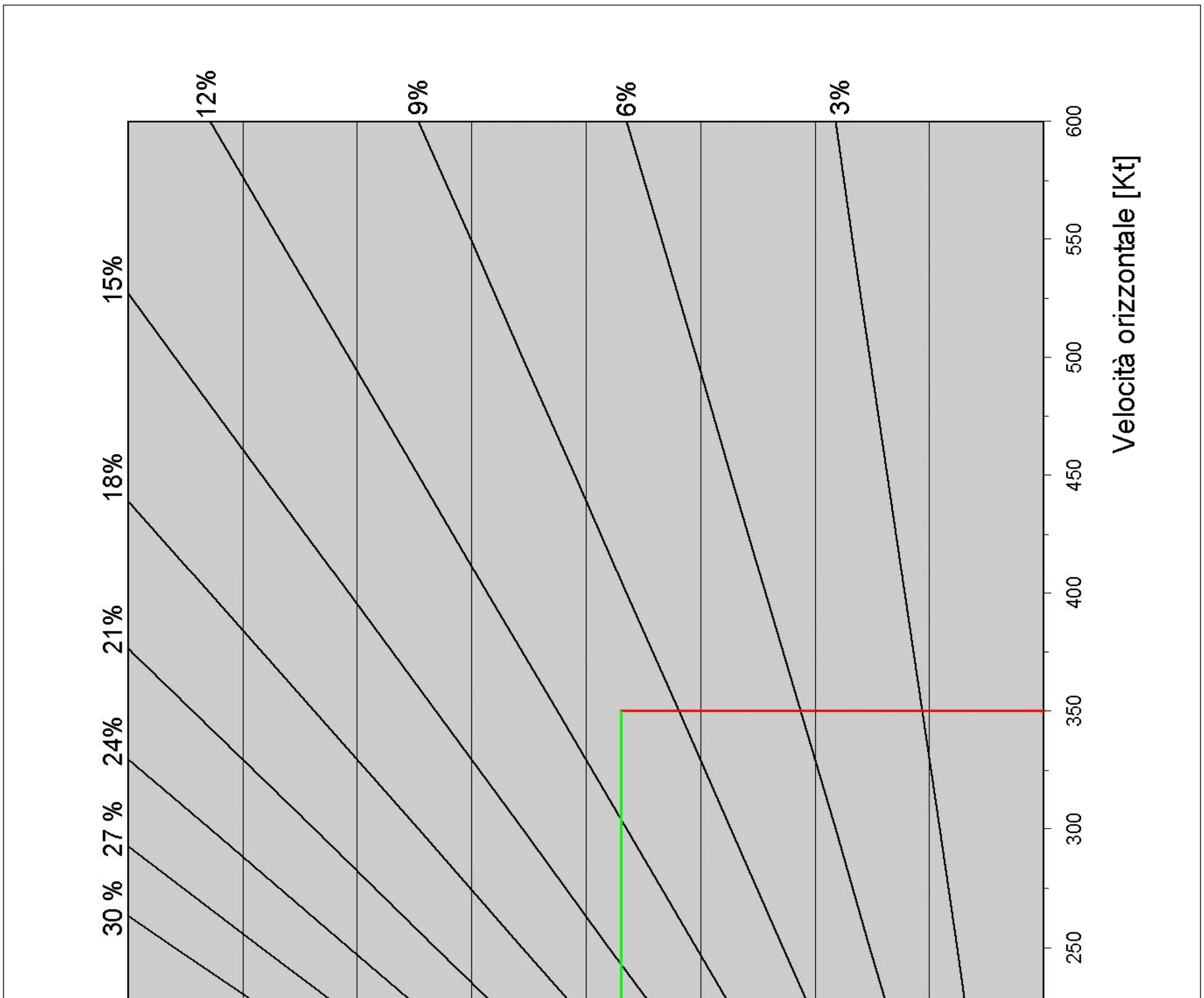


Figura 7 – Esempio 3

Conclusioni

La speranza è che questo documento sia di stimolo ad approfondire l’argomento, magari su testi specializzati, e comunque tenere sveglia l’attenzione e la voglia di imparare per scoprire cose nuove.

“... Non vogliate negar l’esperienza di retro al sol, del mondo senza gente. Considerate la vostra semenza fatti non foste a viver come bruti ma per seguir virtute e canoscenza" *(Dante Alighieri, Divina Commedia, Inferno canto XXVI, 116-120)*

Appendice

A. Utilizzo della calcolatrice scientifica di WINDOWS XP

Di seguito riportiamo un'immagine (figura A) della calcolatrice presente nel sistema operativo Windows Xp in modalità scientifica.

Figura A

Questa modalità è visualizzabile semplicemente cliccando sul menù a tendina VISUALIZZA e selezionando l'opzione SCIENTIFICA.

Nella calcolatrice scientifica è subito selezionabile la modalità di misura degli angoli con tre possibilità : Gradi, Radianti e Gradienti. Come visualizzato nella figura successiva mettiamo il segno di spunta su GRADI. Così facendo i risultati che leggeremo saranno sicuramente angoli misurati in gradi (Figura B).

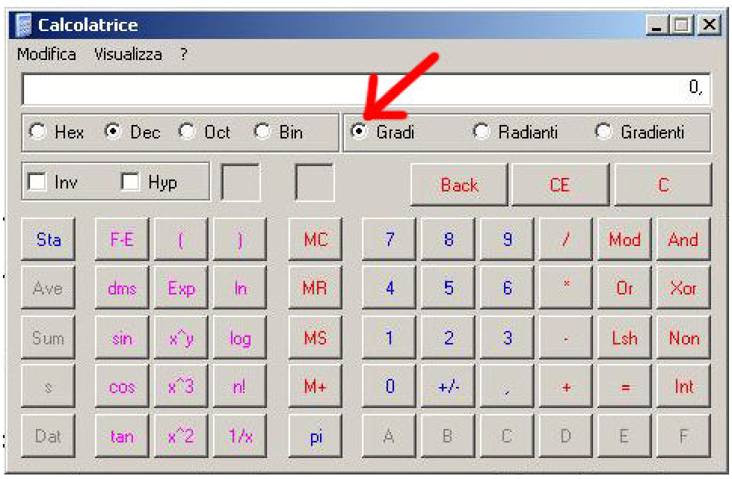


Figura B

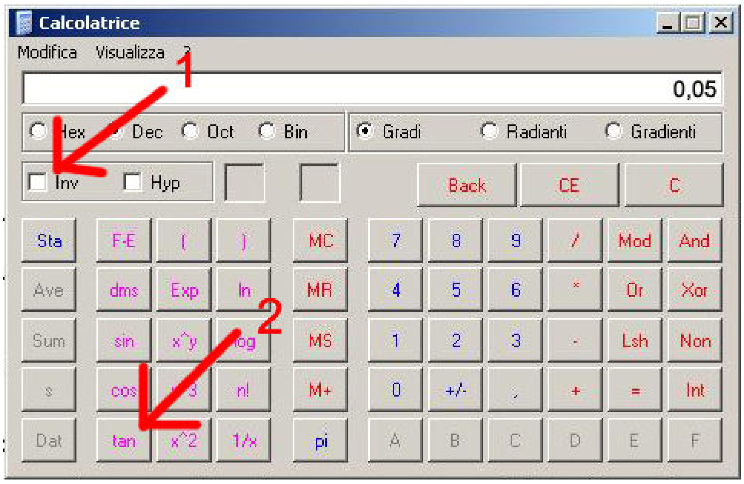
Supponiamo di avere una discesa al 5 %. Quale sarà l'angolo in gradi di discesa?

Le operazioni da compiere sono banali. Bisogna prima di tutto dividere il valore 5% per 100, cioè 5 : 100 il cui risultato è 0,05.

Per ottenere l'angolo in gradi è necessario eseguire nell'ordine 2 operazioni:

1. Mettere il segno di spunta su INV.
2. Premete il tasto TAN

In questo modo si ottiene il valore in gradi dell'angolo di discesa (Figura C).



2,8624052261117475326933447284838° è il valore che otteniamo. Questo numeraccio ci fa concludere che l'angolo di discesa sarà di circa 3°.

Immediatamente, come riportato negli esempi visti in precedenza, è possibile calcolare il rateo di discesa.

Vediamo ora il caso inverso. Dato un angolo di discesa calcolare la pendenza della discesa stessa.

Se l'angolo di discesa assegnato è 3 gradi allora le operazioni da compiere sono le seguenti:

1. scrivere 3 e premere il tasto TAN
2. Moltiplicare per 100

Il risultato è riportato nelle figure D.

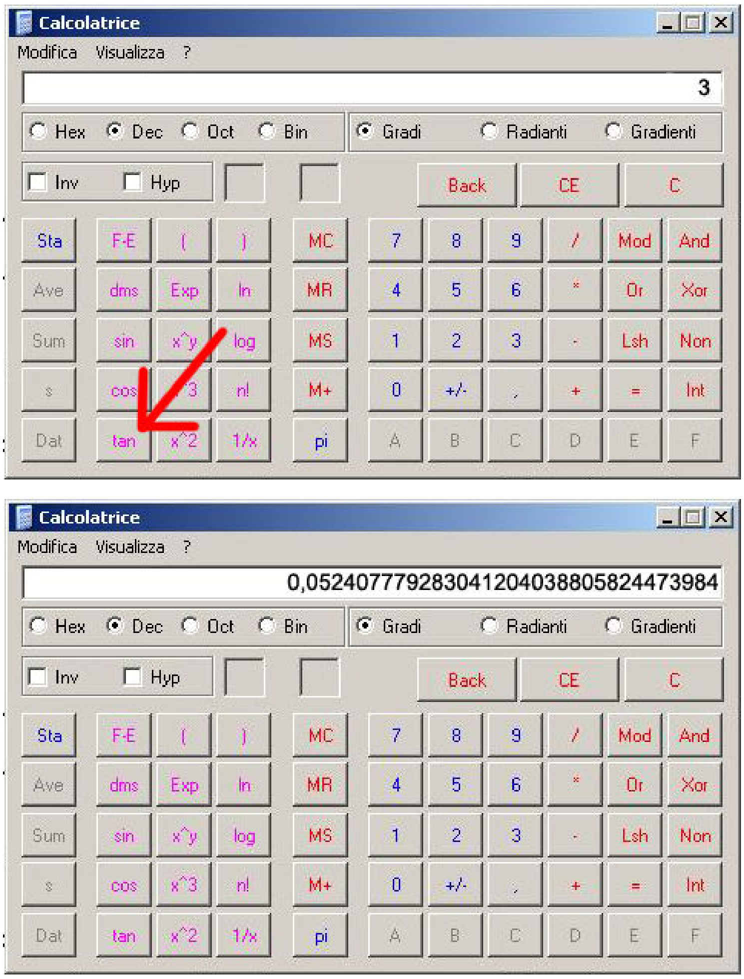


Figura D

Moltiplicando per 100 ed arrotondando il risultato si ottiene una pendenza di circa 5,25%.

B. Conversione unità di misura

Velocità

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
foot per hour (ft/h)	meter per second (m/s)	8.466667 E-05
foot per minute (ft/min)	meter per second (m/s)	5.08 E-03
foot per second (ft/s)	meter per second (m/s)	3.048 E-01
inch per second (in/s)	meter per second (m/s)	2.54 E-02
kilometer per hour (km/h)	meter per second (m/s)	2.777778 E-01
knot (nautical mile per hour)	meter per second (m/s)	5.144444 E-01
knot (nautical mile per hour)	foot per minute (ft/min)	101,268591425984

Angoli

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
degree (°)	radian (rad)	1.745329 E-02

Lunghezza

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
foot (ft)	meter (m)	3.048 E-01
foot (U.S. survey) (ft)	meter (m)	3.048006 E-01
inch (in)	meter (m)	2.54 E-02
inch (in)	centimeter (cm)	2.54
mile, nautical	meter (m)	1.852 E+03